Kraków, 18.01.2021

Dr hab. Andrzej Żak
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Recenzja
rozprawy doktorskiej Pani mgr Nataliyi Petryshyn
pt. „*Zakorzenione upakowania grafów i ich zastosowania*".

Motywacja.

W niniejszej pracy doktorskiej podjęto tematy łączące dwa bliskie, ale jednak odrębne nurty badań w teorii grafów. Są to problem H-dekompozycji grafu i problem H-faktora w grafie, a dokładniej ich relaksacje: problemy maksymalnego krawędziowego lub wierzchołkowego H-upakowania. Krawędziowe H-upakowanie w graf G to rodzina krawędziowo rozłącznych podgrafów grafu G, z których każdy jest izomorficzny z zadanym grafem H. Wierzchołkowe H-upakowanie to z kolei rodzina wierzchołkowo rozłącznych podgrafów grafu G, izomorficznych z H. W przypadkach „doskonałych" (a zarazem najbardziej popularnych), tj. gdy odpowiednia rodzina wykorzystuje wszystkie krawędzie bądź wierzchołki grafu G, mówimy o H-dekompozycji bądź H-faktorze. Oba problemy sięgają samych początków teorii grafów (już w 1890 roku Walecki badał dekompozycje grafów pełnych na cykle hamiltonowskie; z kolei w najprostszym nietrywialnym przypadku tj. gdy $H = K_2$, problem H-faktora to problem istnienia doskonałego skojarzenia w grafie, rozważany już w 1914 roku przez Königa) i wciąż są niezmiennie intensywnie studiowane zarówno od strony czysto teoretycznej (np. w teorii grafów ekstremalnych) jak i od strony złożoności obliczeniowej.

W przypadkach doskonałych, znana jest pełna klasyfikacja obu problemów pod względem złożoności obliczeniowej. Dla problemu H-faktora rozwiązanie podali Hell i Kirkpatrick w roku 1983, dla problemu H-dekompozycji klasyfikacja jest wspólnym dziełem kilku grup badaczy – ostatni wynik kończący pełną klasyfikację został osiągnięty w 2009 roku przez Brysia i Lonca.

W pierwszej części pracy, Pani mgr Nataliyi Petryshyn udało się zdefiniować problem, który jest wspólnym uogólnieniem zarówno krawędziowego jak i wierzchołkowego H-upakowania. Można to zrobić wyróżniając zarówno w grafie G jak i w grafie H, pewien podzbiór wierzchołków nazywany zbiorem korzeni grafu. Zakorzenione H-upakowanie zakorzenionego grafu G polega na znalezieniu takiego krawędziowego H-upakowania, w którym dodatkowo zbiory korzeni podgrafów wchodzących w skład upakowania są parami rozłącznymi podzbiorami zbioru korzeni grafu G. Tak więc, w przypadku gdy wszystkie zbiory korzeni są puste, otrzymujemy problem krawędziowego H-upakowania (ewentualnie H-dekompozycji, gdy upakowanie jest doskonałe), zaś gdy każdy ze zbiorów korzeni jest całym zbiorem wierzchołków odpowiedniego grafu, otrzymujemy problem wierzchołkowego H-upakowania (ewentualnie H-faktora, gdy upakowanie jest doskonałe). Otwiera to drogę dla całego spektrum przypadków pośrednich i dodatkowe możliwości studiowania dwóch klasycznych problemów w innym interesującym kontekście. Autorka głównie koncentruje się na aspekcie złożoności obliczeniowej, choć otrzymuje też pewne inne wyniki. Uważam , że temat podjęty w tej części pracy jest ciekawy i wpisuje się niejako w główne nurty teorii grafów. Dodatkowo, ze względu na powiązania z pewnymi innymi problemami kombinatorycznymi, a także ze względu na

Żak

potencjalną użyteczność przy dowodzeniu twierdzeń dla wersji klasycznych (tj. niezakorzenionych), jego badanie jest w pełni uzasadnione.

W drugiej części pracy rozważane są $\{2K_2, H\}$-dekompozycje, czyli zbiory krawędziowo rozłącznych podgrafów z których każdy jest izomorficzny albo z H albo z $2K_2$. Zagadnienie można zresztą uogólnić dla dowolnej rodziny grafów $\mathcal{H}$. Ponieważ problem złożoności obliczeniowej jest całkowicie rozstrzygnięty dla jednoelementowych rodzin $\mathcal{H}$, jest to naturalny kolejny krok w tej tematyce.

Zawartość pracy.

Praca doktorska składa się ze wstępu, dwóch rozdziałów głównych oraz bibliografii. Całość liczy 95 stron, bibliografia składa się z 28 pozycji.

We wstępie najpierw przedstawiony został aktualny stan wiedzy dotyczący złożoności obliczeniowej obu problemów w wersji klasycznej. Z kolei Autorka zdefiniowała problem w wersji zakorzenionej wyjaśniając w jakim sensie wersje klasyczne są jego dwoma szczególnymi (ekstremalnymi) przypadkami. Przedstawiła również powiązania z innymi problemami kombinatorycznymi (np. istnieniem pewnego rodzaju orientacji krawędzi, czy z doskonałymi podwójnymi pokryciami ścieżkowymi). Wszystko to składa się na przystępne i przejrzyste wprowadzenie Czytelnika w tematykę rozprawy. Zastanawiam się tylko nad ograniczeniem się do omówienia stanu wiedzy wyłącznie z punktu widzenia złożoności obliczeniowej i pominięciem innych (nierzadko przełomowych) wyników ściśle związanych z tematem, chociaż z innej perspektywy.

Rozdział 1 zawiera wyniki dotyczące zakorzenionych upakowań, dekompozycji i faktorów, głównie pod kątem złożoności obliczeniowej. Najważniejszym wynikiem jest pełna klasyfikacja (podsumowana w twierdzeniu 1.3.1) problemu maksymalnego zakorzenionego H-upakowania dla H przebiegającego wszystkie gwiazdy wraz ze wszystkimi możliwymi wyborami korzeni (czyli wszystkie zakorzenione gwiazdy). Należy tu zaznaczyć, że chociaż jest tylko jedna (z dokładnością do izomorfizmu) gwiazda dwukrawędziowa, to różne wybory korzeni prowadzą do aż sześciu nieizomorficznych zakorzenionych gwiazd dwukrawędziowych. Daje to obraz o skali nowych możliwości, które otwiera rozprawa (czas pokaże jakie znaczenie zostanie nadane tematowi w społeczności kombinatorycznej), jak również o skali problemów, które należało pokonać, aby otrzymać tę klasyfikację. Oprócz tego wysoko oceniam ciekawe minimaksowe twierdzenie 1.1.6, będące odpowiednikiem, dla pewnej dwukrawędziowej zakorzenionej gwiazdy, znanej formuły Berge'a dotyczącej najliczniejszego skojarzenia w grafie. Wyniki te zostały opublikowane w renomowanym specjalistycznym czasopiśmie Journal of Graph Theory (czasopismo to nie tylko znajduje się na liście JCR, ale równocześnie jest jednym z bardziej cenionych czasopism dedykowanych kombinatoryce). W stosunku do wspomnianej publikacji, rozdział 1 wzbogacony jest o cenny dodatek rozstrzygający o wielomianowości problemu zakorzenionego H-upakowania dla pewnych wybranych niespójnych grafów H (twierdzenia 1.1.16 ,1.1.17 i 1.1.18), oraz dyskusję związków z problemami istnienia specjalnych orientacji krawędzi grafu (wniosek 1.1.8) oraz z istnieniem w G trasy powiększającej (twierdzenie 1.1.9) – związek o tyle istotny w kontekście pracy, że pojęcie trasy powiększającej odegrało przełomową rolę w konstrukcji wielomianowych algorytmów dla problemu najliczniejszego skojarzenia. Rozdział kończy się naturalnym problemem otwartym dotyczącym kierunku dalszych badań wraz z opisem jakiego rozwiązania spodziewa się Autorka.

Łal

Rozdział 2 dotyczy klasycznych $\{2K_2, H\}$-dekompozycji z zaznaczeniem ich powiązań z wersją zakorzenioną. Dosyć szybko udowodniono (wywnioskowano z nieopublikowanego manuskryptu Caro [6]) jego wielomianowość w przypadku gdy $\Delta(H) \leq |E(H)|/2$ (wniosek 2.1.3). Kolejny wynik to wielomianowość problemu w klasie grafów G spełniających $\Delta(G) \leq (|E(G)| + 1)/2$ (wniosek 2.1.9) poprzedzony serią technicznych lematów. Z kolei udowodniono (twierdzenia 2.2.5, 2.2.7 i 2.2.8) związki pomiędzy problemami zakorzenionego H-upakowania i $\{2K_2, H\}$-dekompozycji. Mianowicie, dla pewnych klas grafów H, odpowiednia złożoność obliczeniowa pierwszego z nich pociąga taką samą złożoność obliczeniową drugiego. Są to cenne twierdzenia pokazujące potencjalną użyteczność wyników osiągniętych dla wersji zakorzenionej w dowodzeniu twierdzeń dla wersji klasycznych (jest to też elegancka klamra spinająca obie części rozprawy). Jako przykład ich zastosowania, udowodniono pełną klasyfikację złożoności obliczeniowej problemu $\{2K_2, H\}$-dekompozycji w przypadku gdy H jest podwójną gwiazdą lub tzw. miotłą (twierdzenia 2.3.2 i 2.3.3). Nie udało się niestety osiągnąć pełnej klasyfikacji w sytuacji ogólnej. Rozdział kończy się hipotezą dotyczącą złożoności problemu dla pewnej klasy grafów H, ściśle związanej z zakorzenionymi małymi gwiazdami rozważanymi w rozdziale 1, oraz jej częściowym potwierdzeniem w przypadku gdy taki H ma dodatkowo wierzchołek uniwersalny.

Metody

Metody podążają raczej „przetartymi ścieżkami", ale ich wachlarz jest dosyć szeroki. Wyniki negatywne osiąga się poprzez tzw. redukcje ze znanych problemów NP. Redukcje te wymagają odpowiedniego pomysłu, aby skonstruować „przejście" do właściwego problemu NP, wykorzystują przy tym różnorodne problemy NP takie jak problemy $K_{1,k}$-dekompozycji czy 3-EHS wraz z ich wariantami. Wyniki pozytywne osiąga się głównie poprzez sprowadzenie problemu do problemu maksymalnego skojarzenia w odpowiednio skonstruowanym grafie pomocniczym, a następnie poprzez użycie narzędzi wypracowanych dla problemu skojarzenia takich jak twierdzenie Berge'a czy twierdzenie Halla. Mimo to dowody wyników pozytywnych nie są łatwiejsze. Wymagają pomysłu na konstrukcję odpowiedniego grafu pomocniczego, zaś wykazanie równoważności obu problemów często następuje w wyniku żmudnej i precyzyjnej analizy. Podoba mi się również pomysł odpowiedniego uporządkowywania wierzchołków w dowodach twierdzeń 1.1.16 i 1.1.18, znacznie ułatwiający następującą potem skomplikowaną analizę. W drugiej części pracy wyniki pozytywne osiągnięto poprzez drobiazgową analizę struktury jaką w G indukują kopie H w $\{2K_2, H\}$-dekompozycji mającej możliwie małą ich liczbę (w konsekwencji zauważono, że wystarczy ograniczyć się do dekompozycji mających co najwyżej jedną kopię H, co rozwiązuje już problem złożoności).

Wszystkie dowody zredagowane są zrozumiale (niewielkie zastrzeżenia mam tylko do dowodów twierdzeń 1.1.16 i 1.1.18 gdzie wkradł się pewien bałagan w indeksowaniu wierzchołków – chodzi głównie o miejscami nieco mylące użycie symboli, bez wpływu na poprawność merytoryczną), a przy tym każdy fragment rozumowania jest bardzo szczegółowo (ale nie przesadnie) rozpisany, często również zilustrowany na rysunku. Wszystko to świadczy o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu badawczego specyficznego dla tematyki. Nie znalazłem błędów merytorycznych, jedynie sporadyczne drobne niedokładności:

- strona 37, wiersz 6: $a_r^2 \to a_r^1$

Łak

- strona 40, wiersz -11: $b_j^{l_q}$ powinno chyba zależeć od *k*; z kolei w wyrażeniu $\sum_{k=1}^{p} deg_F b_i^k$ zamiast *k* lepiej użyć innego oznaczenia, jako że *k* w tym fragmencie dowodu przebiega inny zakres wartości

- w dowodzie twierdzenia 1.1.16: większa konsekwencja w używaniu oznaczeń do indeksowania odpowiednich zbiorów ułatwiłaby Czytelnikowi śledzenie dowodu; przykładowo zbiory *B* najpierw są indeksowane literą „*i*", a za chwilę literą „*j*" podczas gdy „*i*" służy do indeksowania zakorzenionych gwiazd *R*. W dalszej części dowodu zbiory *B* są ponownie indeksowane literą „*i*", zaś gwiazdy *R* literą „*k*".

- strona 82, wiersz -5: „bo zbiorów E_2 jest mniej niż $\binom{e(G)}{2\Delta(H)+2|H|}$". Sformułowanie minimalnie nieprecyzyjne - zbiorów E_2 może być chyba nieco więcej, ale rzeczywiście, w sensownym zakresie rozmiarów grafów *G* i *H* tak jest.

Podsumowanie

Podsumowując stwierdzam, że Pani mgr Nataliya Petryshyn przedstawiła dobrą pracę doktorską, zawierającą sporo ciekawych, oryginalnych wyników, i wykazała się znajomością literatury i tematyki. W szerokim stopniu opanowała specyficzny dla tematyki warsztat badawczy oraz udowodniła umiejętność prowadzenia samodzielnych badań naukowych. Uważam, że jej praca doktorska bez zastrzeżeń spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie mgr Nataliyi Petryshyn do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Andrzej Żak